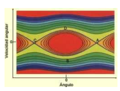
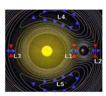
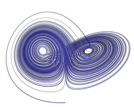
Seminario del Grupo GISDA

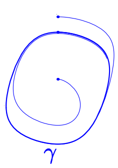
Grupo de Investigación en
Sistemas Dinámicos y Aplicaciones



Periodicidad y oscilaciones en ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos







Expositor: Ricardo Torres Naranjo

Institución: Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.

Fecha: Miercoles 23 de Julio, 2025.

Horario: 16:00 a 17:00 hrs.

Lugar: Sala 101 ex-mecánica.

Resumen

Como extensión del trabajo de A. Myshkis sobre ecuaciones con argumento desviado, Marat Akhmet propuso una clase de ecuaciones diferenciales del tipo

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\gamma(t))),$$

donde $\gamma(t)$ es un *argumento generalizado por tramos constante.* Esta función se define mediante dos sucesiones (t_n) y (ζ_n), con $t_n \leq \zeta_n \leq t_{n+1}$ y $\lim_{n\to\pm\infty} t_n = \pm\infty$, tal que $\gamma(t) = \zeta_n$ para $t \in [t_n, t_{n+1})$. Un ejemplo típico es $\gamma(t) = [t]$, la función parte entera.

En esta ocasión, mostraré avances recientes logrados en la teoría de oscilaciones:

- Inspirados en el trabajo de J. Wiener y A.R. Aftabizadeh [2], estableceremos condiciones suficientes para la oscilación de las soluciones de la ecuación diferencial lineal escalar no autónoma *IDEPCAG*:

$$\begin{array}{ll} x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(\gamma(t)), & t \neq t_k \\ \Delta x|_{t=t_k} = c_k x(t_k^-), & t = t_k \end{array} \tag{1}$$

  donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones reales continuas localmente integrables, $c_k \neq -1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Inspirados en A.M. Samoilenko y N.A. Perestyuk [7], presentamos un teorema tipo Floquet-Lyapunov para la clase de sistemas lineales homogéneos no autónomos ω-periódicos *IDEPCAG*:

$$\begin{array}{ll} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\gamma(t)), & t \neq t_k,\ t \in [0, \infty), \\ \Delta x|_{t=t_k} = C_k x(t_k^-), & t = t_k \end{array} \tag{2}$$

  donde todos los coeficientes son ω-periódicos. Mostramos que:

(a) La matriz fundamental $X(t)$, con $X(0) = I$, puede escribirse en **forma normal de Floquet** como $X(t) = Q(t)e^{Pt},\ P = \frac{1}{\omega}\log X(\omega)$, donde $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es constante y $Q(t) \in \mathcal{PC}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n\times n})$ es una función ω-periódica no singular.

(b) El sistema (2) puede reducirse al sistema autónomo $y'(t) = Py(t)$, mediante la transformación de Floquet-Lyapunov $x(t) = Q(t)Y(t)$.

- Utilizando resultados de la teoría de ecuaciones en diferencias con retardo y adelanto, obtenemos condiciones suficientes para la oscilación de las soluciones de la ecuación diferencial lineal escalar no autónoma *IDEPCA*:

$$\begin{array}{ll} x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x([t \pm k]), & t \neq n, \\ \Delta x(n) = c_n x(n), & t = n, \\ x(\pm k) = x_{\pm k},\ x(0) = x_0 & \end{array} \tag{3}$$

  donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones reales, continuas y localmente integrables, $[\cdot]$ denota la función parte entera, y $k \in \mathbb{N}_+$. Establecemos un criterio de oscilación basado en el comportamiento oscilatorio de la solución discreta de (3). Este caso es importante ya que $\zeta_n = n \pm k \notin [n, n+1]$.

- Inspirados por [1], establecemos dos criterios de oscilación tipo Leighton-Wintner para la ecuación diferencial de segundo orden:

$$(a(t)x'(t))' + g(t, x(\gamma(t))) = 0, \quad t \geq \tau,$$

Bibliografía

[1] Gen-Qiang Wang, Sui Sun Cheng, *Oscillation of second order differential equation with piecewise constant argument*, CUBO, vol. 6, no. 3, (2004). pp. 55–63.

[2] J. Wiener, A. R. Aftabizadeh, *Differential equations alternately of retarded and advanced type*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 1 (129) (1988) 243–255.

[3] R. Torres. *Floquet-Lyapunov theorem for nonautonomous linear periodic differential equations with piecewise constant deviating arguments.* Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Volume 56, 101574, ISSN 1751-570X, (2025)

[4] R. Torres, *On Oscillations in Nonautonomous Linear Impulsive Differential equations with piecewise constant arguments of generalized type.* Mediterr. J. Math. 21, 213 (2024). `https://doi.org/10.1007/s00009-024-02758-2`.

[5] R. Torres, *A simple oscillation criteria for second-order differential equations with piecewise constant argument of generalized type*, (2025). Accepted in Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin. `https://arxiv.org/abs/2504.04690`.

[6] R. Torres, E. Trucco, *Oscillatory behavior of linear nonautonomous advanced and delayed differential equations with piecewise deviating argument via difference equations*, in preparation, (2025).

[7] A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A. August (1995).