SOLUCIONES
SEGUNDA FASE - OLIMPIADAS ONLINE DE MATEMATICA 2020
TERCERO Y CUARTO ENSEÑANZA MEDIA

Nombre:. . . . .

Nivel: . . . .

Establecimiento : . . . .

1. En una frutería se venden manzanas y peras por unidades. Si se compran 10 manzanas en $(x+y)$ pesos, y 20 peras en $(2x-y)$ pesos, entonces el valor en pesos de seis manzanas más doce peras será de:

   a) $(30x-6y)$.

   b) $\dfrac{9x}{5}$ **Alternativa Correcta**

   c) $3x$

   d) $\dfrac{4x+y}{20}$

   e) Ninguna de las anteriores.

2. Con el $35\,\%$ del perímetro de un cuadrado se construye un triángulo equilátero de 14 centímetros de lado. Entonces el área del cuadrado es igual a:

   a) $49\sqrt{3}$ cm^2.

   b) 225 cm^2.

   c) 900 cm^2. **Alternativa Correcta**

   d) 450 cm^2.

   e) Ninguna de las anteriores.

3. Tres faros que se encuentran en la costa de una región austral de Chile, se encienden cada diferentes tiempos. El primer faro se enciende cada 18 segundos, el segundo faro se enciende cada 12 segundos, y el tercer faro se enciende cada 1 minuto. Si a las 20:00 horas los tres coinciden en el instante que encienden, entonces la cantidad de veces que volverán a coincidir en los 20 minutos siguientes, es igual a:

   a) 1 vez.

   b) 2 veces.

   c) 10 veces.

   d) 6 veces. **Alternativa Correcta**

   e) Ninguna de las anteriores.

4. Once trabajadores labran un campo rectangular de 220 metros de largo y 48 metros de ancho, en 6 días. Entonces, para labrar otro campo de las mismas características, de 300 metros de largo por 56 metros de ancho, en cinco días, serán necesarios:

   a) 15 trabajadores.

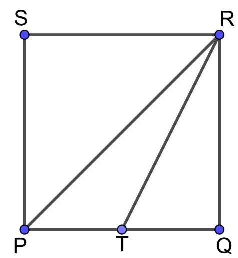
   b) 11 trabajadores.

   c) 21 trabajadores. **Alternativa Correcta**

   d) 16 trabajadores.

   e) Ninguna de las anteriores.

5. En la figura adjunta, $PQRS$ es un cuadrado, y T es el punto medio del lado $\overline{PQ}$. Si el área del triángulo PTR es igual a x^2, entonces el lado del cuadrado mide:



   a) $\sqrt{x}$

   b) x

   c) $\sqrt{2x}$

   d) $2x$ **Alternativa Correcta**

   e) No se puede determinar.

6. Pedro tiene dos cuerdas, una de 120 metros y otra de 96 metros de largo. Desea cortarlas de modo que todos los trozos sean de igual longitud, y lo más largo posible. Entonces la cantidad de trozos de cuerda que obtendrá es igual a:

   a) 24

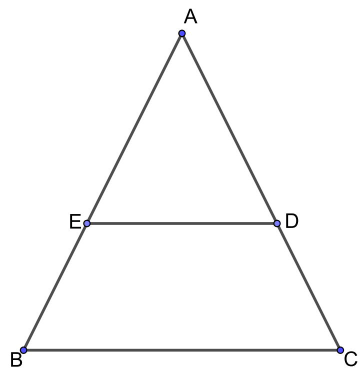
   b) 5

   c) 4

   d) 9 **Alternativa Correcta**

   e) Ninguna de las anteriores.

7. En la figura adjunta, $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$. Si el área del triángulo ABC es $90\,\text{cm}^2$, y las longitudes de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{ED}$ son $15\,\text{cm}$ y $10\,\text{cm}$ respectivamente, entonces el área del trapecio $BCDE$ es igual a:



a) 60 cm^2.

b) 50 cm^2. **Alternativa Correcta**

c) 40 cm^2.

d) 36 cm^2.

e) Ninguna de las anteriores.

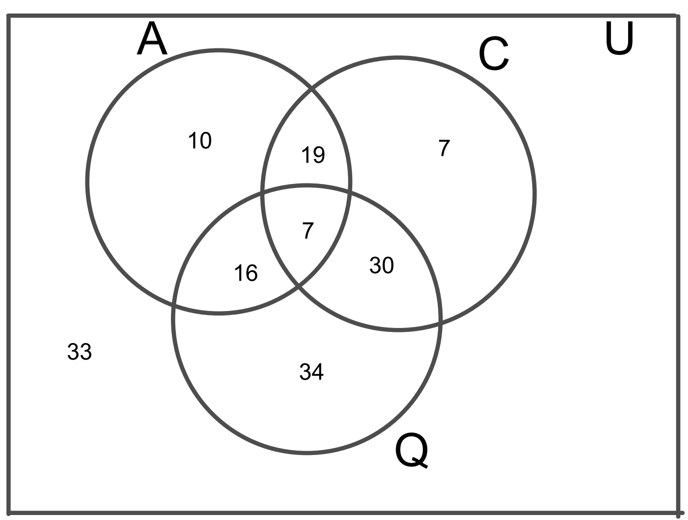
PROBLEMAS DE DESARROLLO: "En los siguientes tres problemas, que son de desarrollo, se le solicita a el (la) alumno(a) justificar de alguna forma sus conclusiones y/o resultados."

8. Este año 2020, hay 156 alumnos en primer año de Ingeniería Civil Industrial de la Universidad del Bío-Bío, de los cuales 52 cursan Álgebra Lineal, 63 Cálculo II, y 87 Química. De los cuales 26 cursan Álgebra Lineal y Cálculo II, 37 Cálculo II y Química, 23 Álgebra Lineal y Química, y 7 cursan las tres asignaturas. Se pide calcular la cantidad de alumnos que cursan sólo una de las asignaturas.

Solución: Si definimos los conjuntos:

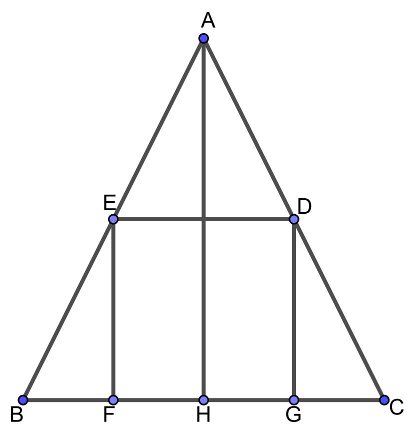
$A = \{x : x \text{ cursa Álgebra Lineal}\}$, $C = \{x : x \text{ cursa Cálculo II}\}$,

$Q = \{x : x \text{ cursa Química}\}$, entonces de acuerdo al enunciado, el Diagrama de Venn es:



Por lo tanto, la cantidad de alumnos que cursan sólo una de las asignaturas es, de acuerdo al diagrama de Venn: $10 + 7 + 34 = 51$.

9. En la figura adjunta, el triángulo ABC es isósceles de base $\overline{BC}$, y altura $\overline{AH}$. Si $EFGD$ es un rectángulo, y las medidas de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AH}$, y $\overline{HG}$, son x, y, y z centímetros respectivamente. Se pide calcular el área del rectángulo $EFGD$, en términos de x, y, z.



Solución: Por ser el triángulo ABC isósceles, entonces la altura $\overline{AH}$ dimidia a la base $\overline{BC}$, y es bisectriz del ángulo con vértice en A. Por lo tanto la longitud del segmento $\overline{FG}$ es igual a $2z$.

Como el triángulo EDA es semejante al triángulo BCA, entonces llamando w a la longitud del segmento $\overline{GD}$ se produce la proporción:

$$\frac{y-w}{y} = \frac{2z}{x}$$

De donde:

$$w = y\left(1 - \frac{2z}{x}\right)$$

Por lo tanto:

$$\text{Área del rectángulo } EFGD = 2z \cdot w = \frac{2yz(x-2z)}{x}\,\text{cm}^2$$

10. Juan tiene una pista de carreras con 2 autos. El primer auto da una vuelta completa a la pista en 31 segundos, y el segundo auto lo hace en 17 segundos.

Por su parte, Pedro también tiene una pista de carreras con 2 autos. El primer auto da una vuelta completa a la pista en 36 segundos, y el segundo auto lo hace en 42 segundos.

Pedro siempre pierde cuando juegan haciendo competir los autos de ambos. Entonces a Pedro se le ocurre un nuevo juego: que hagan partir los 4 autos al mismo tiempo, y que el ganador del juego sea quien tenga primero en su pista sus 2 autos situados en la meta al mismo tiempo.

¿Quién gana el juego, y porqué?

Solución: Sencillamente, debemos calcular cuando, en cada pista, coinciden los 2 autos por primera vez. Para esto basta calcular el mínimo común múltiplo de los tiempos. Entonces, quien gana el juego será quien tenga el m.c.m. más pequeño.

Observamos que, como 31 y 17 son números primos, entonces el

$$\text{m.c.m.}(31, 17) \;=\; 31 \cdot 17 \;=\; 527.$$

Por su parte:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

En consecuencia:

$$\text{m.c.m.}(36, 42) \;=\; 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \;=\; 252.$$

Por lo tanto, la primera vez que vuelven a coincidir en la meta los dos autos de Juan es a los 527 segundos, y la primera vez que vuelven a coincidir en la meta los dos autos de Pedro es a los 252 segundos, **en consecuencia el ganador del juego es Pedro.**