RESPUESTAS Y SOLUCIONES DETALLADAS
PRIMERA FASE - OLIMPIADAS ONLINE DE MATEMATICA 2020
TERCERO Y CUARTO ENSEÑANZA MEDIA

Nombre:...

Nivel: ....

Establecimiento : ....

1. Un cultivador de Florida estima que si se plantan 60 naranjos, la producción media por árbol será de 400 naranjas. La producción media por árbol decrecerá en 4 naranjas por cada árbol adicional plantado en la misma extensión. Entonces, el número de árboles que debería plantar el cultivador para maximizar la producción total es igual a:

   a) 20 árboles.
   b) 70 árboles.
   c) 80 árboles. **Alternativa Correcta**
   d) 120 árboles.
   e) Ninguna de las anteriores.

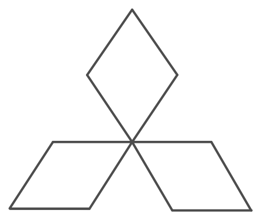
Solución detallada: Sea $x =$ número de naranjos adicionales, sobre los 60. Entonces la producción total será:

$$P(x) \;=\; (60+x)(400-4x) \;=\; -4x^2+160x+24.000.$$

Por lo tanto la producción corresponde a la fórmula de una parábola con vértice (= punto de máximo) en $x \;=\; \dfrac{-b}{2a} \;=\; \dfrac{-160}{2\cdot(-4)} \;=\; 20.$

Respuesta: El número de naranjos que deben plantarse para obtener la máxima producción es igual a $60+20=80$ naranjos. $\square$

2. El perímetro de la figura plana formada por tres rombos congruentes cuyas diagonales miden x centímetros e y centímetros, es igual a:



a) $12(x+y)$ centímetros
b) $6\sqrt{x^2+y^2}$ centímetros **Alternativa Correcta**
c) $6(x+y)$ centímetros
d) $12\sqrt{x^2+y^2}$ centímetros
e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada:

Si las diagonales miden x centímetros e y centímetros, entonces el lado mide z centímetros, donde:

$$z = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

De donde:

$$\text{Perímetro} = 12 \cdot z = 6\sqrt{x^2+y^2} \ \square$$

3. Una administradora de negocios desea determinar la diferencia entre los costos de ser propietaria y de rentar un automóvil. Puede rentar un auto pequeño por 135 dólares al mes (sobre una base anual). Según este plan, el costo por milla (de gasolina y aceite) es de 0,05 dólares. Si comprara el automóvil, el gasto fijo anual sería de 1.000 dólares, y los otros costos sumarían 0,10 dólares por milla. Entonces, el número **mínimo** de millas que tendría que conducir al año para hacer que el arriendo no fuera más costoso que la compra es igual a:

   a) 12.400 millas **Alternativa Correcta**

   b) 20.000 millas

   c) 10.000 millas

   d) 5.000 millas

   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución detallada: Sea x = número de millas que conduce al año. Entonces debe cumplirse:

$$135 \cdot 12 + (0,05) \cdot x \;\leq\; 1.000 + (0,10) \cdot x.$$

   De donde:

$$12.400 \;\leq\; x.$$

   Respuesta: 12.400 millas es el mínimo número de millas que tendría que conducir al año para que el arriendo no sea más costoso que la compra. $\square$

4. La suma de las cifras de $10^{3.507} - 100$ es igual a:

   a) 1.000.000
   b) 23.576
   c) 35.765
   d) 31.545 **Alternativa Correcta**
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada:

Se tiene que:

$$10^{3.507} - 100 = 10^2(10^{3.505} - 1)$$

$$= 10^2(10000\cdots 0 - 1)$$

$$= 10^2(999999\cdots 9)$$

$$= 99\cdots 900 = 99\cdots 900$$

Luego la suma de las cifras es :

$$= 9 \cdot 3.505$$

$$= 31.545 \ \square$$

5. El resultado de la siguiente sumatoria:

$$210.020 - 210.019 + 210.018 - 210.017 + 210.016 - 210.015 + \cdots\cdots\cdots + 4 - 3 + 2 - 1,$$

es igual a:

a) 105.010 **Alternativa Correcta**
b) 121.001
c) 1.234.000
d) 3.510
e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Se tiene que:

$$210.020 - 210.019 + 210.018 - 210.017 + 210.016 - 210.015 + \cdots\cdots\cdots + 4 - 3 + 2 - 1$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \ + \cdots\cdots\cdots + 1 + 1 + 1 + 1 = \frac{210.020}{2} = 105.010 \ \square$$

6. El promedio aritmético de 4.500 números naturales consecutivos es igual a P. Si se elimina los 25 mayores y los 30 menores, entonces el promedio:

   a) Aumenta en 55.
   b) Disminuye en 55.
   c) Aumenta en 2,5. **Alternativa Correcta**
   d) Aumenta en $\frac{P}{5}$.
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada:

Sean $(x+1)$, $(x+2), \cdots, (x+4.500)$ los 4.500 números naturales. Entonces:

$$\frac{(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+4.500\ )}{4.500} \ = \ P$$

De donde:

$$x + 2.250{,}5 = P.$$

Si se anula los 25 mayores y los 30 menores, el promedio será ahora:

$$\frac{(x+31)+(x+32)+\cdots+(x+4.475)}{4.445}$$

$$x \ + \ \frac{(1+2+3+\cdots+4.475)-(1+2+3+\cdots+30)}{4.445}$$

$$x \ + \ \frac{\frac{4.475 \cdot 4.476}{2} - \frac{30 \cdot 31}{2}}{4.445}$$

$$= \ x + 2.253$$

en consecuencia, **el promedio aumenta** en :

$$(x+2.253) \ - \ (x+2.250{,}5) \ = \ 2,5 \ \square$$

7. Se mezclan 3 litros del licor A con 2 litros del licor B. Si 9 litros del licor A valen x pesos y 6 litros del licor B valen y pesos, entonces el precio de los 5 litros de la mezcla es igual a:

   a) $(3x + 2y)$ pesos.

   b) $(x + y)/5$ pesos.

   c) $(x + y)/3$ pesos. **Alternativa Correcta**

   d) $[5 \cdot (3x + 2y)]/18$ pesos.

   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: De acuerdo al enunciado se tiene que 1 litro del licor A vale $\dfrac{x}{9}$ pesos, y 1 litro del licor B vale $\dfrac{y}{6}$ pesos.

De donde: 3 litros del licor A más 2 litros del licor B, cuestan:

$$3 \cdot \left(\frac{x}{9}\right) + 2 \cdot \left(\frac{y}{6}\right) = \frac{x+y}{3}. \square$$

8. El Rector de un Colegio está haciendo arreglos para que un grupo de música rock ofrezca un concierto en las instalaciones del establecimiento educacional. El grupo cobra una cuota única de 2.440 dólares o, por otro lado, una cuota de 1.000 dólares más el 40 por ciento de lo que se obtenga en taquilla. Suponiendo que asistirán 800 personas al concierto, **cuando mucho,** lo que debe cobrar el Rector por cada boleto, de manera que el segundo plan no resulte más costoso que el de la cuota única, es igual a:

   a) 10 dólares.

   b) 5 dólares.

   c) 4,5 dólares. **Alternativa Correcta**

   d) 6,5 dólares.

   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Sea $x =$ valor del boleto. Entonces debe cumplirse:

$$2.440 \;\geq\; 1.000 \;+\; (40\,\% \text{ de } 800x)$$

De donde:

$$1.440 \;\geq\; \left(\frac{2}{5}\,800x\right)$$

Por lo tanto:

$$x \;\leq\; 4,5.$$

Respuesta: Cuando mucho, lo que debe cobrar el Rector por cada boleto es de 4,5 dólares. □

9. Una niña escogió un número, le sumó 12 y luego dividió el resultado por 2, obteniendo su edad. Si su hermano menor tiene 12 años, y la diferencia entre las edades de ambos es de 2 años, entonces el número que escogió la niña es igual a

   a) 10
   b) 8
   c) 16 **Alternativa Correcta**
   d) 12
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Sea $x =$ número que escogió la niña. Entonces:

$$\frac{x+12}{2} = \text{ su edad.}$$

Siendo la diferencia entre las edades de ambos de 2 años, su edad debe ser $12+2=14$ años, y en consecuencia:

$$\frac{x+12}{2} = 14,$$

De donde:

$$x = 16. \square$$

10. Para una compañía que fabrica webcam, el costo entre la mano de obra y material es de \$21 por cada unidad producida y sus costos fijos son de \$70.000. Si el precio de venta de cada webcam es de \$35, Entonces, el número de unidades que debe vender como mínimo para que la compañía genere utilidades es igual a:

   a) 15.000 unidades
   b) 5.001 unidades **Alternativa Correcta**
   c) 2.001 unidades
   d) 3.501 unidades
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: De acuerdo al enunciado, si $x =$ número de unidades vendidas, entonces las utilidades son:

$$U = U(x) = (35 - 21)x - 70.000,$$

De donde:

$$U(x) > 0 \iff 14x - 70.000 > 0 \iff x > 5.000.$$