RESPUESTAS Y SOLUCIONES DETALLADAS
PRIMERA FASE - OLIMPIADAS ONLINE DE MATEMATICA 2020
SÉPTIMO Y OCTAVO BÁSICO

Nombre:...

Nivel: ....

Establecimiento : ....

1. Para una compañía que fabrica webcam, el costo entre la mano de obra y material es de \$21 por cada unidad producida y sus costos fijos son de \$70.000. Si el precio de venta de cada webcam es de \$35, Entonces, el número de unidades que debe vender como mínimo para que la compañía genere utilidades es igual a:

   a) 15.000 unidades
   b) 5.001 unidades **Alternativa Correcta**
   c) 2.001 unidades
   d) 3.501 unidades
   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución detallada: De acuerdo al enunciado, si $x =$ número de unidades vendidas, entonces las utilidades son:

$$U = U(x) = (35 - 21)x - 70.000,$$

   De donde:

$$U(x) > 0 \iff 14x - 70.000 > 0 \iff x > 5.000.$$

2. Las medidas de los lados de un triángulo son X, Y, y Z, donde Z es la medida del lado mayor. Entonces, para que el triángulo sea rectángulo debe cumplirse que:

   a) $Z = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$
   b) $(X+Y)^2 = Z^2$
   c) $Z = \sqrt{X+Y}$
   d) $X = \sqrt{Z^2 - Y^2}$ **Alternativa Correcta**
   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución detallada: Sabemos que el triángulo será rectángulo si y sólo si se cumple el Teorema de Pitágoras, esto es si:

$$Z^2 \;=\; X^2 + Y^2,$$

   Equivalentemente:

$$X = \sqrt{Z^2 - Y^2}. \quad \square$$

3. La suma de dos números es 180, y éstos están en la razón $7:5$. Entonces el menor de dichos números es igual a:

   a) 67,5
   b) 105
   c) $51,4$
   d) 75 **Alternativa Correcta**
   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución detallada: Sean a, y b dichos números. Entonces de acuerdo al enunciado se cumple:

$$a + b = 180, \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{b} = \frac{7}{5}.$$

De donde $a = \frac{7}{5}b$, y luego:

$$\frac{7}{5}b \; + \; b \; = \; 180,$$

De donde:

$$b \; = \; 75, \quad a \; = \; 105. \; \square$$

4. Una niña escogió un número, le sumó 12 y luego dividió el resultado por 2, obteniendo su edad. Si su hermano menor tiene 12 años, y la diferencia entre las edades de ambos es de 2 años, entonces el número que escogió la niña es igual a

   a) 10
   b) 8
   c) 16 **Alternativa Correcta**
   d) 12
   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Sea $x =$ número que escogió la niña. Entonces:

$$\frac{x+12}{2} \; = \; \text{su edad.}$$

Siendo la diferencia entre las edades de ambos de 2 años, su edad debe ser $12 + 2 = 14$ años, y en consecuencia:

$$\frac{x+12}{2} \; = \; 14,$$

De donde:

$$x \; = \; 16. \; \square$$

5. Si $3^x + 3^{-x} = A$, entonces $9^x + 9^{-x}$ es igual a:

   a) A^2

   b) $A^2 + 2$

   c) $A^2 - 2$ **Alternativa Correcta**

   d) $3A$

   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución detallada: Si $3^x + 3^{-x} = A$, entonces $A^2 = (3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 9^{-x}$ De donde:

$$9^x + 9^{-x} = A^2 - 2. \square$$

6. Una administradora de negocios desea determinar la diferencia entre los costos de ser propietaria y de rentar un automóvil. Puede rentar un auto pequeño por 135 dólares al mes (sobre una base anual). Según este plan, el costo por milla (de gasolina y aceite) es de 0,05 dólares. Si comprara el automóvil, el gasto fijo anual sería de 1.000 dólares, y los otros costos sumarían 0,10 dólares por milla. Entonces, el número **mínimo** de millas que tendría que conducir al año para hacer que el arriendo no fuera más costoso que la compra es igual a:

   a) 12.400 millas **Alternativa Correcta**

   b) 20.000 millas

   c) 10.000 millas

   d) 5.000 millas

   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Sea x = número de millas que conduce al año. Entonces debe cumplirse:

$$135 \cdot 12 + (0,05) \cdot x \ \leq \ 1.000 + (0,10) \cdot x.$$

De donde:

$$12.400 \ \leq \ x.$$

Respuesta: 12.400 millas es el mínimo número de millas que tendría que conducir al año para que el arriendo no sea más costoso que la compra.

7. El Rector de un Colegio está haciendo arreglos para que un grupo de música rock ofrezca un concierto en las instalaciones del establecimiento educacional. El grupo cobra una cuota única de 2.440 dólares o, por otro lado, una cuota de 1.000 dólares más el 40 por ciento de lo que se obtenga en taquilla. Suponiendo que asistirán 800 personas al concierto, **cuando mucho,** lo que debe cobrar el Rector por cada boleto, de manera que el segundo plan no resulte más costoso que el de la cuota única, es igual a:

   a) 10 dólares.

   b) 5 dólares.

   c) 4,5 dólares. **Alternativa Correcta**

   d) 6,5 dólares.

   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Sea x = valor del boleto. Entonces debe cumplirse:

$$2.440 \ \geq \ 1.000 \ + \ (40\,\% \text{ de } 800x)$$

De donde:

$$1.440 \ \geq \ \left(\frac{2}{5}\,800x\right)$$

Por lo tanto:

$$x \leq 4,5.$$

Respuesta: Cuando mucho, lo que debe cobrar el Rector por cada boleto es de 4,5 dólares. $\square$

8. Se mezclan 3 litros del licor A con 2 litros del licor B. Si 9 litros del licor A valen x pesos y 6 litros del licor B valen y pesos, entonces el precio de los 5 litros de la mezcla es igual a:

   a) $(3x + 2y)$ pesos.

   b) $(x + y)/5$ pesos.

   c) $(x + y)/3$ pesos. **Alternativa Correcta**

   d) $[5 \cdot (3x + 2y)]/18$ pesos.

   e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: De acuerdo al enunciado se tiene que 1 litro del licor A vale $\dfrac{x}{9}$ pesos, y 1 litro del licor B vale $\dfrac{y}{6}$ pesos.

De donde: 3 litros del licor A más 2 litros del licor B, cuestan:

$$3 \cdot \left(\frac{x}{9}\right) + 2 \cdot \left(\frac{y}{6}\right) = \frac{x + y}{3}. \square$$

9. La siguiente expresion es igual a:

$$23 + \frac{6}{1 + \frac{2}{3 - \frac{1}{2}}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

a) 232/9 **Alternativa Correcta**

b) 25

c) 26

d) 0

e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Desarrollando se obtiene que:

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{3 - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{5}{9},$$

De donde:

$$23 + \frac{6}{1 + \frac{2}{3 - \frac{1}{2}}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = 23 + (6-1)\frac{5}{9} = \frac{232}{9}. \square$$

10. Un gerente de una pequeña fábrica sabe por experiencia que cada uno de sus 30 empleados puede producir cerca de 150 unidades de trabajo por día. Para más de 30 empleados, la producción diaria por empleado disminuye, en 3 unidades por cada empleado adicional después de 30. Entonces el número de empleados que deberá tener la empresa para obtener la máxima producción es igual a:

a) 50 empleados

b) 10 empleados

c) 45 empleados

d) 40 empleados **Alternativa Correcta**

e) Ninguna de las anteriores.

Solución detallada: Sea $x =$ número de empleados adicionales a los 30. Entonces la producción será:

$$P(x) = (30+x)(150-3x) = -3x^2 + 60x + 4500.$$

Por lo tanto la producción corresponde a la fórmula de una parábola con vértice (= punto de máximo) en $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-60}{2\cdot(-3)} = 10.$

Respuesta: El número de empleados que deberá tener la empresa para obtener la máxima producción es igual a $30 + 10 = 40$ empleados. □